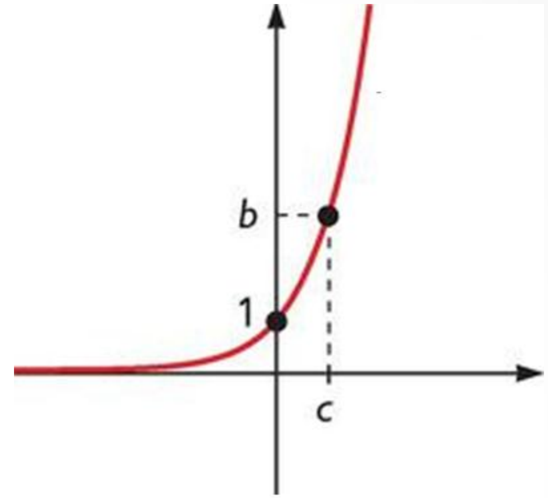
6

Trigonometría Analítica

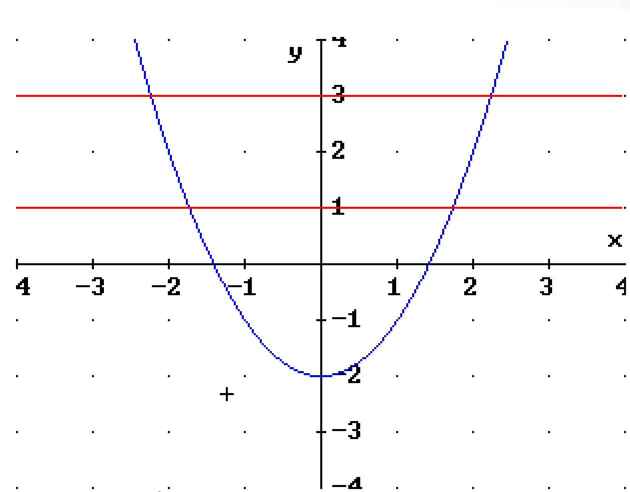
Sección 6.6
Funciones trigonométricas inversas

Funciones Inversas

- Recordar que para una función, *f*, tenga inversa , f^{-1} , es necesario que *f* sea una función uno-a-uno.
  - Una función, *f*, es uno-a-uno si para cada $a \neq b$ en el dominio de *f*, $f(a) \neq f(b)$.
  - (Cualesquiera dos x diferentes producen dos y's diferentes.)



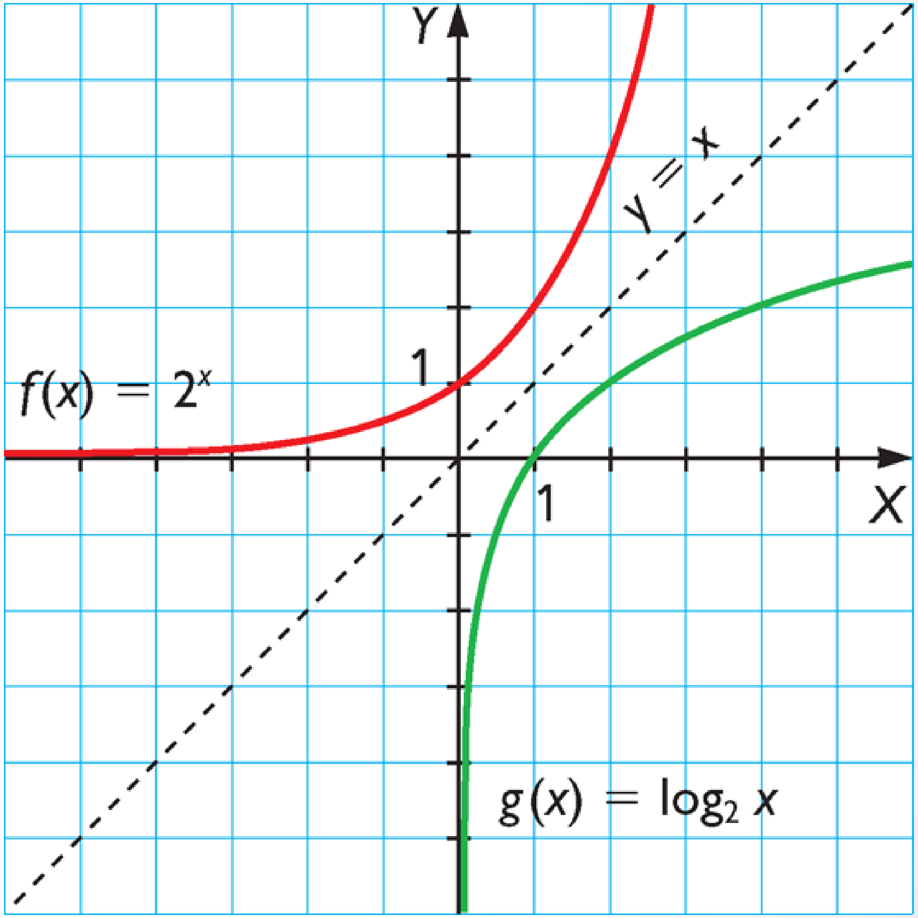
Función que es uno-a-uno



Función que NO es uno-a-uno

Funciones Inversas

- La función inversa, f^{-1} , invierte la correspondencia dada por f .
- Esto es, si el par ordenado (u,v) pertence a f, entonces (v, u) pertenece f^{-1}



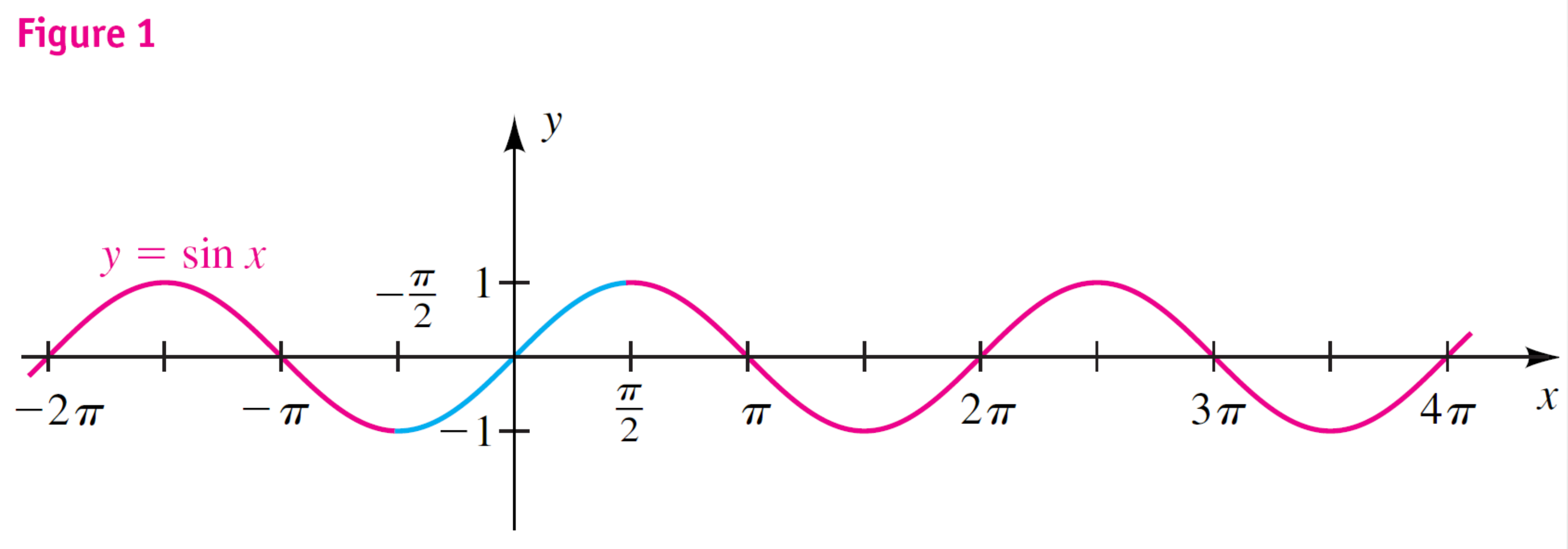
Relación entre f y f^{-1}

- El dominio de f^{-1}es el campo de valores de f
- El campo de valore se f^{-1} es el dominio de f
- $f(f^{-1}(x)) = x$ para cada x en el dominio de f^{-1}
- $f(f^{-1}(y)) = y$ para cada y en el dominio de f
- El punto (a,b) pertenece a la gráfica de f si y solo si el punto (b,a) pertenece a la gráfica de f^{-1}
- Las gráficas de f^{-1} y f son reflexiones sobre la recta y = x, la una de la otra.

Función Inversa del Seno

- Las funciones trigonométricas, en general, son ***periódicas***, y por lo tanto NO son uno-a-uno.
- Si restringimos el dominio de la función del seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces obtenemos una función creciente en todo el intervalo y por lo tanto, uno-a-uno .
- En este intervalo, la variable y <u>asume todos los valores de la función del seno una sola vez</u>.

Función del seno – dominio restringido



Función inversa del seno

Si la función del seno se restringe a el dominio [–π/2, π/2] y su campo de valores es [–1, 1]

La función inversa del seno, se define como

y = sin^{-1} x , si y solo si x = sin *y*

para $-1 \le x \le 1$; $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(En palabras, *y* es el número real (o el ángulo) en [–π/2 , π/2] cuyo seno es igual a x.)

Nota: *sin^{-1}* x también se denota *arcsin x*

Comentarios sobre el rango de $\sin^{-1}x$

- Aunque es cierto que $sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, se debe notar que $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{5\pi}{6}$ ya que $\frac{5\pi}{6}$ NO está en el campo de valores del $sin^{-1}x$.
- $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Valores del seno inverso

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sin y = \frac{1}{2}$ and $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\sin y = -\frac{1}{2}$ and $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \sin^{-1}(1)$	$\sin y = 1$ and $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arcsin(0)$	$\sin y = 0$ and $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ and $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

Propiedades de la inversa del seno

- Las propiedades generales de la función inversa, nos dan la siguientes propiedades

$$\textbf{(1)} \quad \sin(\sin^{-1} x) = \sin(\arcsin x) = x \quad \textbf{si} \quad -1 \le x \le 1$$

$$\textbf{(2)} \quad \sin^{-1}(\sin y) = \arcsin(\sin y) = y \quad \textbf{si} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

- Hallar el valor exacto:

(a) $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

•<u>Solución</u> :

(a) Podemos identifcar las soluciones de dos formas.

- Podemos determinar $\sin^{-1}$ ½ (el valor numérico cuyo seno es ½), o sea π/6
- luego evaluamos sin (π/6), que es ½.

Solución (cont'd)

- Otra forma es aplicar la propiedad de $\sin^{-1}$:
  - Como $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(b) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

como $-\pi/2 \leq \pi/4 \leq \pi/2$, podemos usar la propiedad de $\sin^{-1}$ para obtener

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Solución (cont)

(c) $\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{2\pi}{3}\right)$

- Como 2π/3 no está en [–π/2 , π/2], NO podemos usar la propiedad de $\sin^{-1}$ dada anteriormente.
- En este caso, evaluaremos la expresión interna,sin (2π/3), y luego usaremos la definición de $\sin^{-1}$, como sigue:

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo

- Determinar el valor exacto de y si

$$y = \sin^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$$

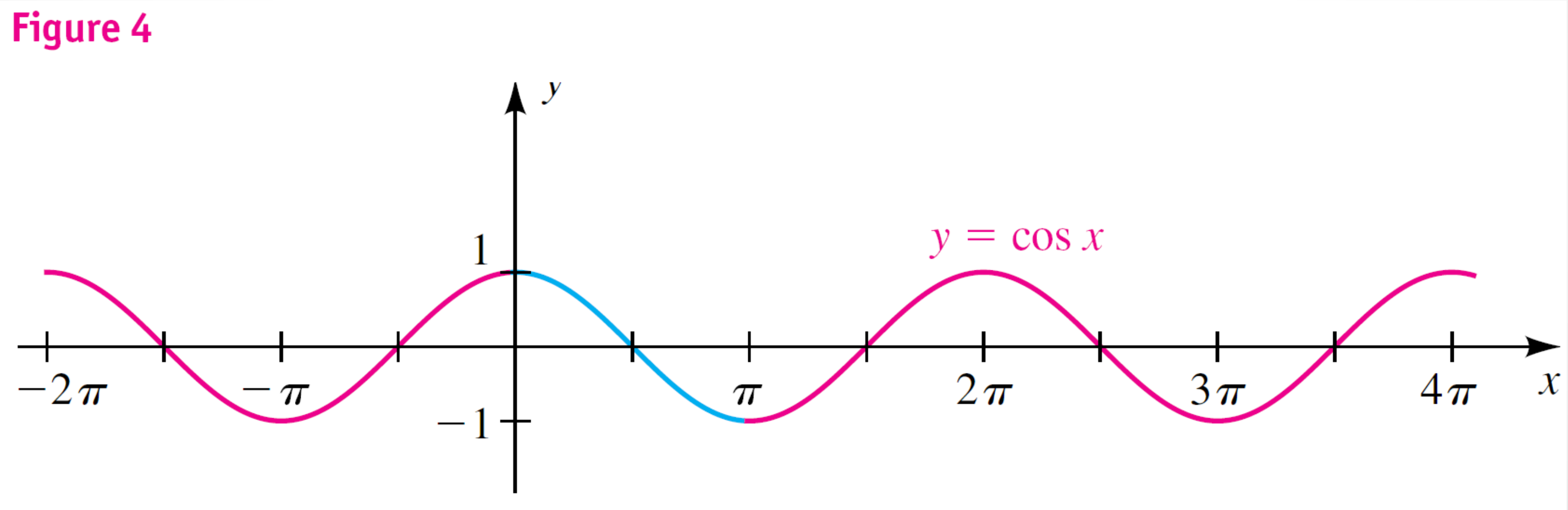
- <u>Solución</u>
- Evaluamos, primeramente, la expresión interna.
- tan (3π/4) $= -1$
- Luego, hallamos el seno inverso de ese número.

$$y = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Coseno inverso

- El ***dominio*** de $y = \cos^{-1}$ se retringe al intervalo $[0, \pi]$, como muestra la porción azul de la siguiente gráfica.
- Se obtiene una función uno-a-uno ya que es decreciente en todo su dominio.
- Nuevamente $y = \cos^{-1} x$ asume todos los valores de la función del coseno una sola vez.
- La notación $y = \cos^{-1} x$ se lee, "y es el coseno inverso de x" o "y es el ángulo con coseno igual a x" (con $0 \leq y \leq \pi$).
- $y = \cos^{-1}$ también se denota $y = \mathit{arccos}\ x$

Coseno Inverso (cont)



Valores del Coseno Inverso

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = \frac{1}{2}$ and $0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{1}{2}$ and $0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}(1)$	$\cos y = 1$ and $0 \leq y \leq \pi$	$y = 0$
$y = \arccos(0)$	$\cos y = 0$ and $0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ and $0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

Ejemplo

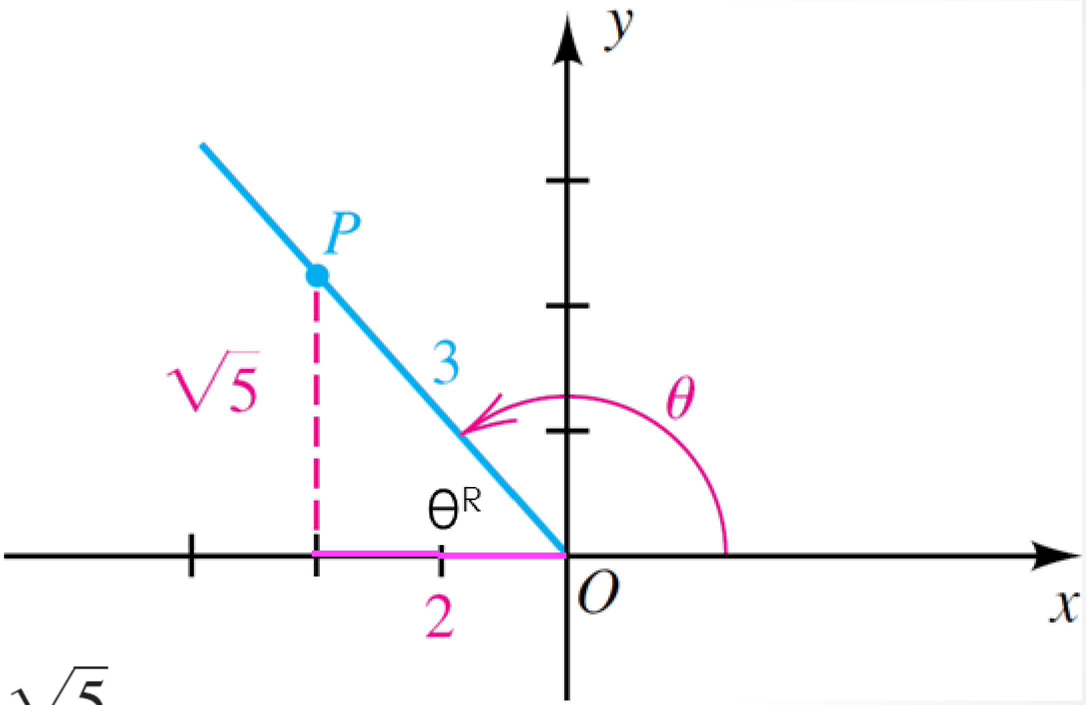
- Hallar el valor exacto del $\sin\left[arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$
- <u>Solución</u>
- Si θ = arccos (–⅔), entonces usando la definiciónbn de la función de coseno inverso, tenemos que

$$\cos\theta = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- Por lo tanto θ está en el cuadrante II.

Solución (cont)

Por el teorema de pitágora tenemos que el lado opuesto a θ



$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5},$$

$$\sin\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \sin \theta^R = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Función de la tangente inversa

- Para que la función tangente tenga inversa, restringimos su dominio al intervalo abierto (–π/2, π/2), para obtener una función creciente uno-a-uno.
- Usamos esta nueva función para definir la inversa.

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{sis} \quad x = \tan y$$

para cualquier número real x, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Properties de la función tangente inverso

- Tal como ocurrió con $\sin^{-1}$ y $\cos^{-1}$, tenemos las siguientes properties for $\tan^{-1}$:

(1) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ para toda x

(2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$ si $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

Ejemplo

- Hallar el valor exacto:

(a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ **(b)** $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\arctan(\tan\pi)$

- a. $\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000$
- b. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
- c. $\arctan(\tan\pi) = \arctan 0 = 0$

Ejemplo

- Hallar el valor exacto de

  tan (arctan 3 – arctan 2).

Solución:

Digamos que **x = arctan 3 ; y = arctan 2**

Esto implica que **tan x = 3; tan y = 2**

Además, **tan (arctan 3 – arctan 2)= tan (x– y)**

Usando la fórmla para la diferencia de ángulos tenemos que

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$$

Ejemplo

Hallar el valor exacto de

$$\sin(\tan^{-1} \tfrac{1}{2} + \cos^{-1} \tfrac{4}{5}).$$

Solución:

Digamos que **$u = \tan^{-1} \frac{1}{2}$; $v = \cos^{-1} \frac{4}{5}$**

Esto implica que **$\tan u = \frac{1}{2}$; $\cos v = \frac{4}{5}$**

Además, **$\sin(\tan^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{4}{5}) = \sin(u + v)$**

Usando la fórmula para la suma de ángulos

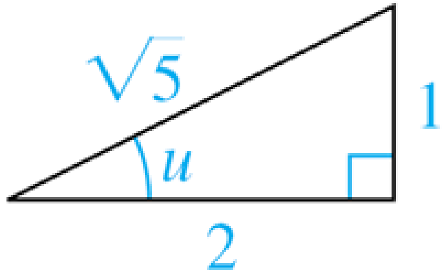
tenemos que

- $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

Solución (cont)

De **tan u = ½**

tenemos que



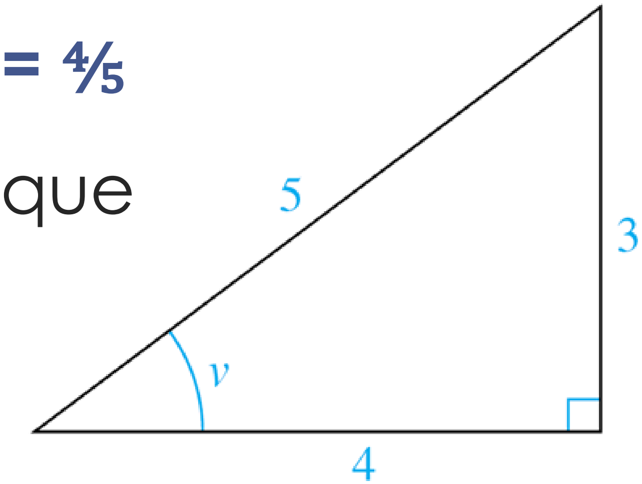
$\sin u = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}$

De **cos v = ⅘**

tenemos que

$\sin v = \frac{3}{5}$

$\cos v = \frac{4}{5}$



Ahora $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{5\sqrt{5}} + \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{7}{5\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{25}$$

Ejemplo

Determinar el valor de θ, aproximado a la décima más cercana.

Solución:

Debe notar que θ NO está en un triángulo rectángulo, pero se forma un triángulo recto con la suma de los ángulos $\theta + \alpha$.

Solución

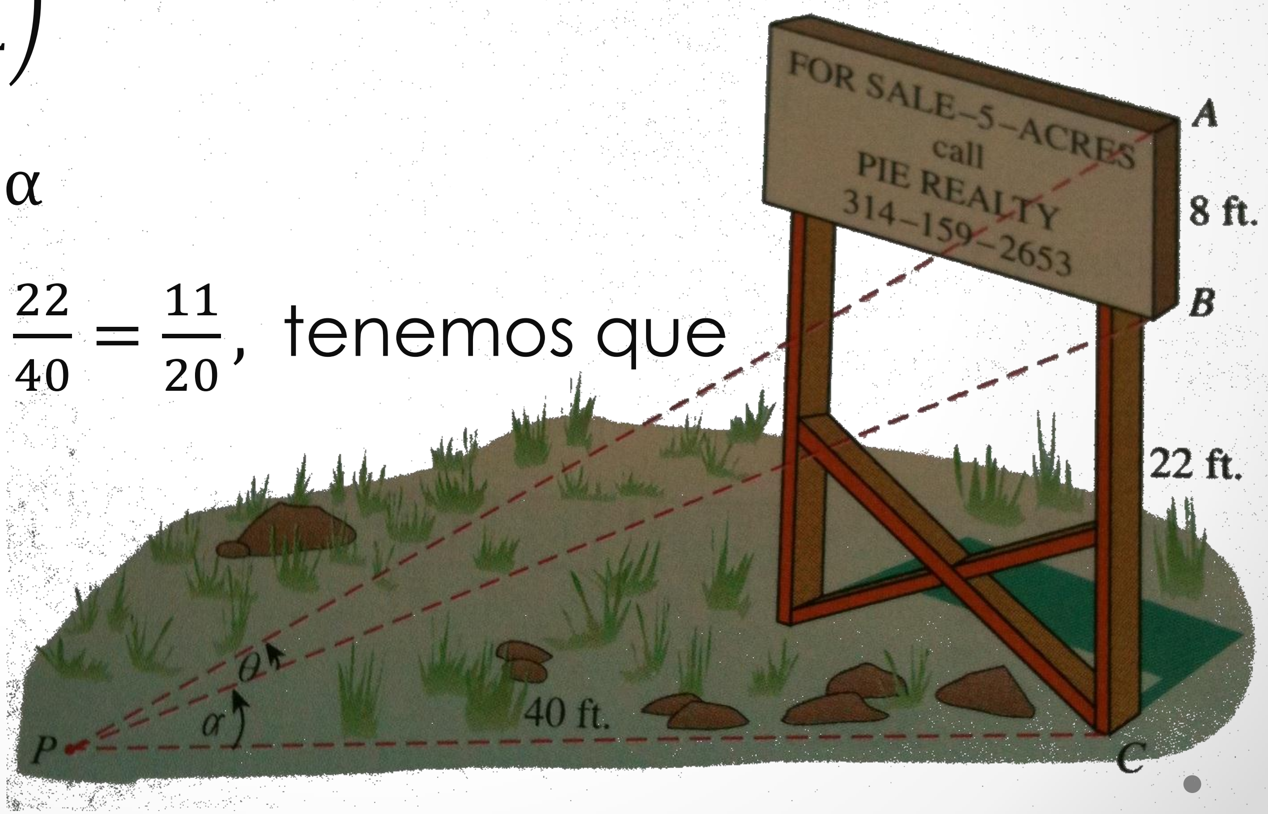
$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{8 + 22}{40} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$\theta + \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \alpha$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$, tenemos que

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11}{20}\right)$$



Solución (cont)

Solución:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11}{20}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{11}{20}\right)$$

Usando la TI-89, podemos aproximar

$$\theta = \tan^{-1}(.75) - \tan^{-1}(11/20)$$

$$\approx .140658$$

Que en grados es

$$\approx .1406 \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\approx 8^{\circ}$$